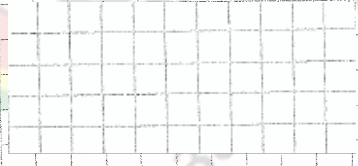
MASTER COPY

Tel. 388/9837745

Meccanica razionale

APPUNTI



www.mastercopy.it
050/831212

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

VETTORI

- **Prodotto misto:** $\vec{u}\cdot\vec{v}\wedge\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{w}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$ • **Doppio prodotto vett.:** $(\vec{u}\wedge\vec{v})\wedge\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{w})\vec{u}$
- **Terna intrinseca $\hat{t},\hat{n},\hat{b}$:** $\hat{t} = \frac{d\vec{OP}}{ds}$, $\hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds} / \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$, $\hat{b} = \hat{t}\wedge\hat{n}$ • **Curvatura:** $c = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$ • **Raggio di curvatura:** $\rho = \frac{1}{c}$
- **1ª formula di Frenet-Sernet:** $\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\hat{n}$
- **Variazione del momento (cambiamento di polo):** $\vec{M}_B = \vec{BA}\wedge\vec{R} + \vec{M}_A$ • se $\vec{R}=0 \Rightarrow \vec{M}$ non dipende dal polo • $\vec{M}_A\cdot\vec{R} = \vec{M}_B\cdot\vec{R}$
- **Asse centrale:** punti P tali che $\vec{M}_P\wedge\vec{R}=0$, sono dati dall'equazione vettoriale $\vec{OP} = (\vec{R}\wedge\vec{M}_O)/R^2$

CINEMATICA

- PUNTO

- **Espressione intrinseca $\vec{v}, \vec{a}$:** $\vec{v} = \dot{s}\hat{t}$, $\vec{a} = \ddot{s}\hat{t} + \dot{s}^2/\rho\hat{n}$
- **Moti piani:** $\hat{r} = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$, $\hat{\theta} = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} \Rightarrow \dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$, $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$
  $\vec{OP} = \rho\hat{r}$, $\vec{v}_P = \dot{\rho}\hat{r} + \rho\dot{\theta}\hat{\theta}$, $\vec{a}_P = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\hat{r} + \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta})\hat{\theta}$
- **Moti centrali:** $\vec{OP}\wedge\vec{a} = 0$, $\vec{OP}\wedge\vec{v} = \cost$. Pongo $\rho^2\dot{\theta} = C$
  $\vec{v}_P = -c\frac{d(1/\rho)}{d\theta}\hat{r} + \frac{c}{\rho}\hat{\theta}$ $\vec{a}_P = a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{d^2(1/\rho)}{d\theta^2}\right)$ $(\vec{a}_P\cdot\hat{\theta} = 0)$
- **Velocità areolare:** $\vec{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k}$, $|\dot{\vec{A}}| = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$ • costante nei moti centrali
- **Moti composti:** $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$, $\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)}$, $\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(r)} + \vec{a}_P^{(t)} + \vec{a}_P^{(c)}$ → è nulla se P è fermo in $\mathcal{T}^{(r)}$

- CORPO RIGIDO

- **Formula fondamentale della cinematica rigida:** $\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\vec{AP}$ • **Matrice L:** $\vec{v}^* = L^T\vec{v}$, $\vec{v} = L\vec{v}^*$
- **Teorema di Rivals:** $\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{AP} - \omega^2\vec{AP}$ (2D!) • $\vec{\omega} = p\hat{\imath}^* + q\hat{\jmath}^* + r\hat{k}^*$
- **Formule di Poisson:** $\frac{d\hat{\imath}^*}{dt} = \vec{\omega}\wedge\hat{\imath}^*$, $\frac{d\hat{\jmath}^*}{dt} = \vec{\omega}\wedge\hat{\jmath}^*$, $\frac{d\hat{k}^*}{dt} = \vec{\omega}\wedge\hat{k}^*$
  $\vec{\omega} = (\hat{k}^*\cdot\frac{d\hat{\jmath}^*}{dt})\hat{\imath}^* + (\hat{\imath}^*\cdot\frac{d\hat{k}^*}{dt})\hat{\jmath}^* + (\hat{\jmath}^*\cdot\frac{d\hat{\imath}^*}{dt})\hat{k}^*$ • **Acc. di Coriolis:** $\vec{a}_P^{(c)} = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_P^{(r)}$
- **Asse di Mozzi:** punti P tali che $\vec{v}_P\wedge\vec{\omega} = 0$, eq. vettoriale $\vec{AB} = (\vec{\omega}\wedge\vec{v}_A)/\omega^2$, dove A è l'origine della terna mobile • **Composizione vel. angolari:** $\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}$
- **Derivata di una funzione vettoriale:** $\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d_r\vec{w}}{dt} + \vec{\omega}\wedge\vec{w}$ • **CIR:** $\vec{v}_P = \vec{\omega}\wedge\vec{CIR\,P}$
- **Coni di Poinsot:** In un moto rigido sferico (un punto fisso $\forall t$), l'asse istantaneo di rotazione genera un cono fisso in $\mathcal{T}$ e un cono mobile in $\mathcal{T}^*$. Il cono mobile rotola senza strisciare sul cono fisso.
- **Angoli di Eulero:** 1) rotazione ψ intorno a z; 2) rotazione θ intorno a N, il nuovo x; 3) rotazione φ intorno a z^*

$$L^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\cos\theta\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\theta\cos\psi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\cos\theta\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\theta\cos\psi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\vec{\omega} = (\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi)\hat{\imath}^* + (\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi)\hat{\jmath}^* + (\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\hat{k}^*$

STATICA E DINAMICA

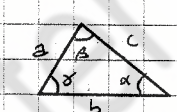
- **Lavoro:** $dL = \vec{F}\cdot\vec{dOP}$ • **Potenza:** $W = \frac{dL}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$ • **Potenziale:** $dU = -dL$ • **Impulso:** $d\vec{I} = \vec{F}\,dt$
- **Quantità di moto:** $\vec{Q} = m\vec{v}$ • **Momento polare di $\vec{Q}$ (momento angolare):** $\vec{K}_A = \vec{AP}\wedge\vec{Q}$
- **Momento assiale di $\vec{Q}$:** $K_{\hat{u}} = (\vec{AP}\wedge\vec{Q})\cdot\hat{u}$ • **Energia cinetica:** $T = \frac{1}{2}mv^2$
- **Energia potenziale:** gravitazionale $U = mgz$; elastica $U = \frac{1}{2}kx^2$; centrifuga $U = \frac{1}{2}m\omega^2R^2$
- **Teoremi fondamentali:** quantità di moto $\vec{F} = \dot{\vec{Q}}$; impulso $\vec{I} = \vec{Q}(t) - \vec{Q}(0)$; momento di Q $\vec{K}_A = \vec{M}_A$; energia cinetica $L = T(t) - T(0)$ • **Integrali primi (conservazioni):** se $\vec{F}\perp\hat{x}$ $Q_x = m\dot{x} = \cost$; se $\vec{F}\times\vec{z}$ $K_z = m(x\dot{y} - \dot{x}y)\hat{k} = \cost$; se F passa per A $\vec{K}_A = \vec{AP}\wedge\vec{Q} = \cost$, se le forze attive sono tutte conservative $E = T + U = \cost$
- **Baricentro:** $\vec{OG} = \int\vec{OP}\,dm / m$ • **Momenti d'inerzia:** teorema di Huygens-Steiner $I_a = I_{a_G} + md^2$;
- **Tensore d'inerzia:** $I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$
  $I_{xx} = \int(y^2+z^2)\,dm$ $I_{xy} = -\int xy\,dm$
  $I_{yy} = \int(x^2+z^2)\,dm$ $I_{xz} = -\int xz\,dm$
  $I_{zz} = \int(x^2+y^2)\,dm$ $I_{yz} = -\int yz\,dm$
- **Ellissoide d'inerzia:** $I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2I_{xy}xy + 2I_{xz}xz + 2I_{yz}yz = \lambda^2$, gli autovettori del tensore d'inerzia indicano le DIREZIONI PRINCIPALI; gli autovalori sono detti MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA; 2 autovalori uguali → solido di rotazione; 3 autovalori uguali → sfera
- **Teorema di Noether:** $\vec{K}_A = \vec{K}_A^{(r)} + m\vec{AG}\wedge\vec{v}_A$ dove A è l'origine di una terna $\mathcal{T}'$ i cui assi sono paralleli a quelli di $\mathcal{T}$. • **Teorema di König:** generalizzato $T = T_A^{(r)} + \frac{1}{2}mv_A^2 + m\vec{v}_G^{(r)}\cdot\vec{v}_A$; se $A = G$ $T = T_G^{(r)} + \frac{1}{2}mv_G^2$ • **Momento angolare:** $\vec{K}_A = m\vec{AG}\wedge\vec{v}_A + I\cdot\vec{\omega}$, con I tensore d'inerzia
- **Energia cinetica:** $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}(I_{xx}p^2 + I_{yy}q^2 + I_{zz}r^2)$; moto piano $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$
- **Spostamento virtuale:** corpo rigido $\delta P_i = \delta A + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{AP_i}$, $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}\,dt$ • **Lavoro virtuale:** $\delta L = \sum F_i\cdot\delta P_i$ corpo rigido $\delta L = \vec{R}\cdot\vec{\delta A} + \vec{M}\cdot\vec{\varepsilon}$ • **Vincoli privi di attrito:** $\delta L \geq 0$, $\delta L = 0$ se bilaterali

- **Coppie cinematiche:** $\vec{R}^{(v)} \cdot \delta\vec{A} + \vec{H}^{(v)} \cdot \vec{\varepsilon} = 0$; guida prismatica $\vec{\varepsilon}=0 \Rightarrow \vec{R}^{(v)} \cdot \delta s \; 0 \Rightarrow \vec{R}^{(v)} \perp \hat{u}$; cerniera fissa A $\delta A = 0 \Rightarrow (\vec{H}_A^{(v)} \cdot \hat{k})\delta\theta = 0 \Rightarrow \vec{H}_A^{(v)} \perp \hat{k}$; coppia elicoidale $\delta\vec{A} = \frac{p}{2\pi}\delta\theta\hat{u} \Rightarrow$ $\Rightarrow R_u^{(v)} + \frac{p}{2\pi} H_u^{(v)} = 0$; coppia rototraslatoria $R_u^{(v)}\delta s + H_u^{(v)}\delta\theta = 0 \Rightarrow R_u^{(v)} = 0 \; H_u^{(v)} = 0$.
- **PLV:** si ha equilibrio se e solo se $\delta L \leq 0$, $\delta L = 0$ se i vincoli sono bilaterali
- **Lagrangiana:** $\mathcal{L} = T - U$ • **Equazioni di Lagrange:** $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$, q_k parametri lagrangiani.
- **Equazioni di Eulero:** corpo avente un punto O fisso. Se $\vec{R}^{(\theta,\varphi)}$ e $\vec{H}^{(\theta,\varphi)}$ sono funzioni di φ, θ, ψ, t

$$\begin{cases} I_x\dot{p} - (I_y - I_z)qr = H_x^{(\theta,\varphi)} \\ I_y\dot{q} - (I_z - I_x)pr = H_y^{(\theta,\varphi)} \\ I_z\dot{r} - (I_x - I_y)pq = H_z^{(\theta,\varphi)} \end{cases}$$

TRIGONOMETRIA

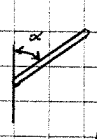
- **Angoli associati:** $\sin(-x) = -\sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$, $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\tg(-x) = -\tg x$, $\tg(\frac{\pi}{2} - x) = \cotg x$, $\tg(\frac{\pi}{2} + x) = -\cotg x$, $\tg(\pi - x) = -\tg x$. • **Formule di addizione:** $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$, $\tg(\alpha \pm \beta) = (\tg\alpha \pm \tg\beta)/(1 \mp \tg\alpha\tg\beta)$. • **Formule di duplicazione:** $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\tg(2\alpha) = 2\tg\alpha/(1 - \tg^2\alpha)$. • **Formule di bisezione:** $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\cos(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, $\tg(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$. • **Formule parametriche:** con $t = \tg(\frac{\alpha}{2})$, $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\tg\alpha = \frac{2t}{1-t^2}$.
- **Teorema dei seni:** $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
- **Teorema del coseno:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$



INTEGRALI NOTEVOLI

$\int \tg x = -\log|\cos x|$; $\int \cotg x = \log|\sin x|$; $\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tg x$; $\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cotg x$; $\int \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{\sin x\cos x}{2}$; $\int \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{\cos x\sin x}{2}$; $\int \arcsin x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; $\int \arctg x = x\arctg x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

MOMENTI D'INERZIA



$I = \frac{1}{3}ml^2\sin^2\alpha$



$I = \frac{1}{12}ml^2$



$I = mR^2$



$I = \frac{1}{2}mR^2$



$I = \frac{1}{2}mR^2$



$I = \frac{1}{4}mR^2$



$I = \frac{1}{12}m(a^2+b^2)$



$I = \frac{1}{12}ma^2$



$I = mR^2$



$I = \frac{2}{3}mR^2$



$I = \frac{1}{2}mR^2$



$I = \frac{2}{5}mR^2$

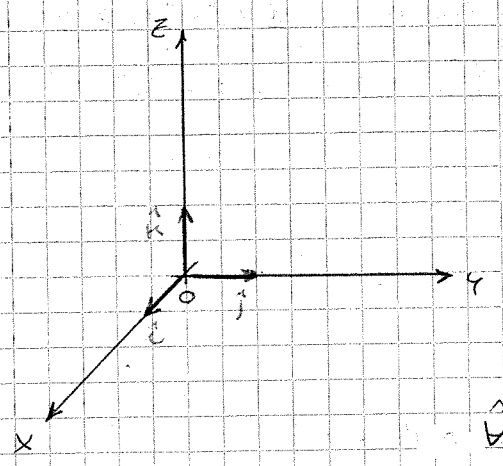
DERIVATE NOTEVOLI

$\cos^2 x \to -2\sin x\cos x$; $\sin^2 x \to 2\sin x\cos x$; $\cos^3 x \to -3\sin x\cos^2 x$; $\sin^3 x \to 3\sin^2 x\cos x$; $\cos^4 x \to -4\sin x\cos^3 x$; $\sin^4 x \to 4\sin^3 x\cos x$; $1/\cos x \to \sin x/\cos^2 x$; $1/\sin x \to -\cos x/\sin^2 x$; $1/\cos^2 x \to 2\sin x/\cos^3 x$; $1/\sin^2 x \to -2\cos x/\sin^3 x$; $1/\cos^3 x \to 3\sin x/\cos^4 x$; $1/\sin^3 x \to -3\cos x/\sin^4 x$; $1/\cos^4 x \to 4\sin x/\cos^5 x$; $1/\sin^4 x \to -4\cos x/\sin^5 x$; $\tg x \to 1/\cos^2 x$; $\tg^2 x \to 2\sin x/\cos^3 x$; $\tg^3 x \to 3\sin^2 x/\cos^4 x$; $\tg^4 x \to 4\sin^3 x/\cos^5 x$; $\cotg x \to -1/\sin^2 x$; $\cotg^2 x \to -2\cos x/\sin^3 x$; $\cotg^3 x \to -3\cos^2 x/\sin^4 x$; $\cotg^4 x \to -4\cos^3 x/\sin^5 x$

MASTER COPY

Tel. 388/9837745

VETTORI DIPENDENTI DA UN PARAMETRO



dato un vettore $\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$, considero v_x, v_y, v_z funzioni di una variabile scalare $t \in [t_1, t_2]$

es.: $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$

$\vec{v}(t)$ è una funzione vettoriale della variabile scalare t

$\vec{v}(t)$ si dice <u>finita</u> nell'intervallo $[t_1, t_2]$ se $v_x(t), v_y(t), v_z(t)$ assumono valori finiti $\forall t \in [t_1, t_2]$

$\vec{v}(t)$ si dice <u>continua</u> in $\bar{t} \in (t_1, t_2)$ se esiste $\lim_{t \to \bar{t}} \vec{v}(t) = \vec{V}$ e se $\vec{V} = \vec{v}(\bar{t})$

- <u>DERIVATA</u> di un vettore $\vec{v}(t)$.
dati due istanti $t, t+\Delta t \in [t_1, t_2]$, calcolo $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ e

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \left(= \dot{\vec{v}} \text{ se } t \text{ è il tempo} \right)$$

- <u>COMPONENTE LUNGO UNA RETTA r</u>
Considero una retta r non dipendente da t (fisso nel sistema di riferimento); chiamo $v_r \in \mathbb{R}$ la componente di $\vec{v}$ rispetto a r.
Ad esempio ho

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_r = \frac{dv_r}{dt} \quad , \quad v_r = |\vec{v}| \cos\varphi$$

dato un vettore $\vec{v}(t) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$

- <u>PROPRIETÀ DELLA DERIVATA DI UN VETTORE</u>

-) $\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{v}_i}{dt}$

-) considero una funzione scalare $f(t)$, posso fare il prodotto per scalare

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\,\vec{v}(t)\right] = \frac{df}{dt}\cdot\vec{v} + f \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

-) $\frac{d}{dt}\left[\vec{v}(t) \bullet \vec{u}(t)\right] = \vec{v} \bullet \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \bullet \frac{d\vec{v}}{dt}$

-) $\frac{d}{dt}\left[\vec{v}(t) \wedge \vec{u}(t)\right] = \vec{v} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{u}$

-) $\frac{d}{dt}\left[\vec{v}(s(t))\right] = \frac{d\vec{v}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$, $s(t) \in \mathbb{R}$ (scalare)

-) $\vec{v}$ ha modulo costante $\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} \perp \vec{v}$